PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teoremas de Frankel y Wilking

I Escuela de Postgrado en Matemática

Víctor Valencia Hernández

28 de mayo de 2024

Facultad de Matemáticas, UC

Definición
Sea M una variedad. Una ***métrica de Riemann*** sobre M es un mapa diferenciable $\delta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ que es un producto interno en cada $p \in M$, i.e.

$$\delta_p := \delta(p) : \mathsf{T}_pM \times \mathsf{T}_pM \to \mathbb{R},$$

donde δ_p es definida positiva, simétrica y bilineal.

Teorema de Levi-Civita
Sea (M, δ) una variedad riemanniana. Existe una única conexión afín $\boldsymbol{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ simétrica y compatible con δ.

Definición
La ***curvatura*** de M es el campo tensorial $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Definición

La ***curvatura*** de M es el campo tensorial $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$R(X, Y, Z) = \boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{\nabla}_Y Z - \boldsymbol{\nabla}_Y \boldsymbol{\nabla}_X Z - \boldsymbol{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Seccional

Sea $v, w \in \mathrm{T}_p M$ linealmente independientes. Se define la ***curvatura seccional*** de v y w como

$$\mathrm{Sec}_p(v, w) = \frac{\delta(R(v, w)w, v)}{\|v\|^2 \|w\|^2 - \delta(v, w)^2}.$$

Ricci

Sea $x = z_n$ un vector unitario en T_pM; tomamos una base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ del hiperplano en T_pM ortogonal a x. Se define la ***curvatura de Ricci*** en la dirección x como

$$\mathrm{Ric}_p(x, x) = \sum_{i=1}^{n-1} \delta(R(x, z_i)x, z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Sec}_p(x, z_i).$$

Curvatura, otra vez

Ricci
Sea $x = z_n$ un vector unitario en T_pM; tomamos una base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ del hiperplano en T_pM ortogonal a x. Se define la ***curvatura de Ricci*** en la dirección x como

$$\mathrm{Ric}_p(x, x) = \sum_{i=1}^{n-1} \delta(R(x, z_i)x, z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Sec}_p(x, z_i).$$

Observación

- Notar que la curvatura de Ricci es una especie “traza” de la curvatura.
- Si $\mathrm{Sec} = 0$, entonces $\mathrm{Ric} = 0$. También vale para el signo.

Segunda Forma Fundamental

Definición [2]
La ***segunda forma fundamental*** de una hipersuperficie $H \subset M$ con un campo vectorial normal unitario $N : H \to \mathsf{N}H$ está definido como el campo 2-tensorial

$$\mathrm{II}(X, Y) = \delta(\nabla_X N, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

donde $\mathsf{N}H = \{v \in \mathsf{T}_pM \colon p \in H, \delta(v, w), \forall w \in \mathsf{T}_pH\}$.

Tipos de hipersuperficie

Totalmente geodésica
Una subvariedad se dice ***totalmente geodésica*** si toda geodésica está localmente definida en la misma subvariedad. En particular, si $H^{n-1} \subset M$ es una hipersuperficie, entonces $\mathrm{II}(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(H)$.

Tipos de hipersuperficie

Totalmente geodésica
Una subvariedad se dice ***totalmente geodésica*** si toda geodésica está localmente definida en la misma subvariedad. En particular, si $H^{n-1} \subset M$ es una hipersuperficie, entonces $\mathrm{II}(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(H)$.

Superficie minimal
Una hipersuperficie $H^{n-1} \subset M$ se dice ***minima*** si, para cualquier base ortonormal de $\mathsf{T}H$, $\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{II}(E_i, E_i) = 0$.

Observación
Notar que toda hipersuperficie totalmente geodésica es mínima.

Motivación

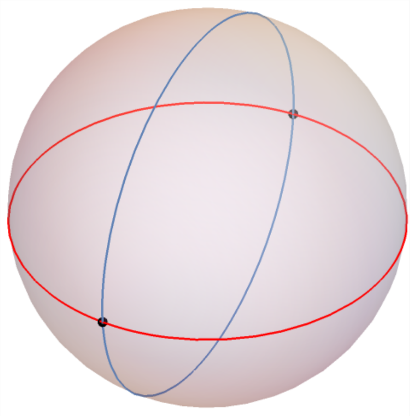

Figure 1: Estoy aprendiendo a usar ***Mathematica***.

Teorema de Frankel

Frankel (1961)
Sea M una n-variedad riemanniana conexa y completa con curvatura seccional positiva. Si A y B son dos subvariedades de M cerradas y totalmente geodésica tales que $\dim A + \dim B \geq n$, entonces $A \cap B \neq \varnothing$.

Teorema de Frankel

Frankel (1961)
Sea M una n-variedad riemanniana conexa y completa con curvatura seccional positiva. Si A y B son dos subvariedades de M cerradas y totalmente geodésica tales que $\dim A + \dim B \geq n$, entonces $A \cap B \neq \varnothing$.

Idea de la demostración

- Existe una geodésica γ que minimiza y es ortogonal a A y B.
- Existe un campo vectorial X a lo largo de γ que es tangente a A y B en los extremos.
- La segunda variación respecto a X es negativa.

Theorem 3, [3]
En una variedad riemanniana conexa y completa con curvatura de Ricci positiva, cualquier par de hipersuperficies minimales deben intersectarse.

Theorem 3, [3]
En una variedad riemanniana conexa y completa con curvatura de Ricci positiva, cualquier par de hipersuperficies minimales deben intersectarse.

Lemma 2.4, [1]
Sea M^n una n-variedad riemanniana compacta orientable con borde no vacío ∂M. Suponga que M tiene curvatura de Ricci no negativa y el borde es estrictamente convexo respecto al vector normal interior. Entonces, cualquier par de hipersuperficies mínimas orientables propiamente incrustadas de M con borde libre en ∂M deben intersectarse.

Condiciones para el borde

Estrictamente convexo
Sea M una variedad riemanniana con borde. Se dice que ∂M es ***estrictamente convexo*** con respecto al vector normal interior si existe una constante $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathrm{II}(v, v) \geq k$ para todo vector unitario $v \in \mathsf{T}_p\partial M$.

Borde libre
Se dice que $H \subset M$ es una hipersuperficie con ***borde libre*** si H y ∂M intersectan ortogonalmente a lo largo de $\partial\Sigma$.

Un poco de teoría de Morse

Decimos que el índice de una geodésica ***es mayor o igual a*** k si existe un espacio de campos k-dimensional a lo largo de γ tales que la segunda variación de estos campos es negativa.

Decimos que el índice de una geodésica ***es mayor o igual a*** k si existe un espacio de campos k-dimensional a lo largo de γ tales que la segunda variación de estos campos es negativa.

Proposición
Sea M una variedad riemanniana completa y $A \subset M$ una subvariedad compacta. Si toda geodésica en $\Omega_{A,A}(M)$ que es perpendicular a A en los extremos tiene índice mayor o igual a k, etnonces $A \subset M$ es k-conexo.

Wilking (2003)
Sea M^n una variedad riemanniana cerrada con curvatura seccional positiva. Si $A^{n-k} \subset M$ es una subvariedad cerrada totalmente geodésica, entonces $A \subset M$ es $(n-2k+1)$-conexo.

Observación

- La idea de la demostración es la misma que la, del teorema de Frankel.
- Por tanto, buscamos hacer una generalización no negativa para el Teorema de Wilking.

A. Fraser and M. M.-C. Li.
Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative ricci curvature and convex boundary.
Journal of Differential Geometry, pages 1–16, 2017.

P. Petersen.
Riemannian Geometry, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*.
Springer, 3 edition, 2016.

P. Petersen and F. Wilhelm.
On Frankel's theorem.
Canadian Mathematical Bulletin, 46(1):130–139, 2003.

¿Preguntas?

¡Gracias por su atención!