Variedades de Prym-Tyurin como componentes isotípicas de una variedad Jacobiana

Víctor Valdebenito

Universidad de La Frontera

29, Mayo 2024

I Escuela de postgrado en matemática

Ruta

Curvas Elípticas

Definición 1.1

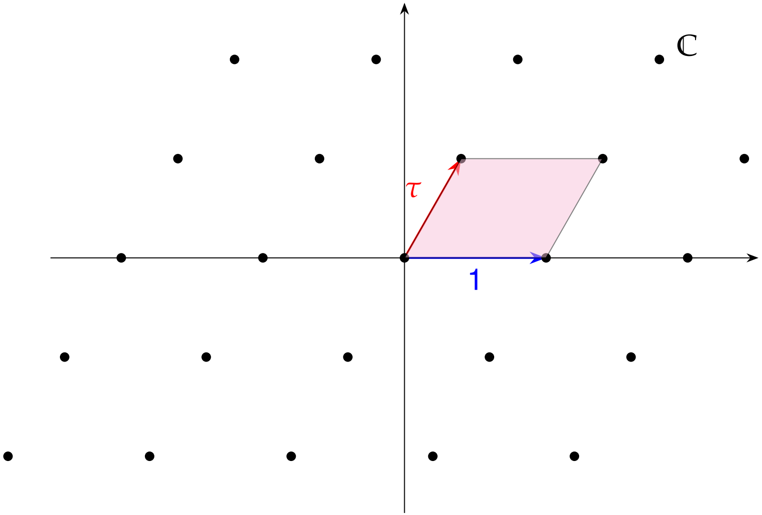
Una curva elíptica $E = \mathbb{C}/\Lambda$, *donde* Λ *es un reticulado (subgrupo discreto de rango maximal).*

Toda curva elíptica es isomorfa a

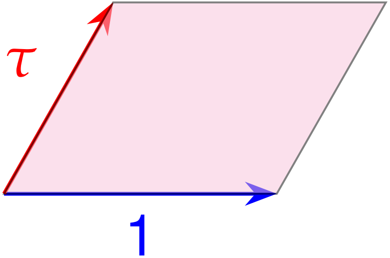
$$\mathbb{C}/\left\langle 1, \tau \right\rangle_{\mathbb{Z}},$$

para algún $\tau \in \mathbb{H}$.

Curvas Elípticas



Curvas Elípticas



Curvas Elípticas

Estas variedades analíticas de dimensión compleja 1 tienen muchas propiedades interesantes:

- Son grupos abelianos.
- Son variedades proyectivas. Por ejemplo existe una aplicación u

$$u : \mathbb{C} / \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}^2,$$

donde la imagen de u en $\mathbb{P}^2$ está contenida en

$$C : y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3$$

donde g_2, g_3 están determinadas por τ.

Variedades abelianas

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimension g y Λ un reticulado en V.

Definición 1.2

Una variedad abeliana es un toro complejo $A = V/\Lambda$ tal que existe una forma $\mathbb{R}$-bilineal antisimétrica no degenerada E en V con $E(iv, iw) = E(v, w)$ para todo $v, w \in V$ y $E(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z}$.

Variedades abelianas

- El par (A, E) se denomina una *variedad abeliana polarizada*.
- Dada una polarización sobre $A = V/\Lambda$, siempre existe una base $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g}$ de Λ de tal manera que
$$E = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_g \\ -\Delta_g & 0 \end{pmatrix},$$
donde $\Delta_g = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_g)$ tales que $d_i | d_{i+1}$. La tupla $(d_1, \ldots, d_g)$ se denomina el *tipo* de la polarización.
- Una variedad abeliana polarizada (A, E) con E de tipo $(1, \ldots, 1)$ se denomina una *variedad abeliana principalmente polarizada* (v.a.p.p.).

Ejemplos de variedades abelianas

Ejemplo 1.3 (Curvas Elípticas)

Dada $E_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ *con* $\Lambda_\tau = \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ *y* $\tau \in \mathbb{H}$*, podemos definir:*

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto \frac{v\overline{w}}{\operatorname{Im} \tau} \end{aligned}$$

Entonces $E = \Im H$ *es una polarización para* E_τ*.*

Para la base $\{\tau, 1\}$ de Λ_τ se tiene que

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Ejemplos de variedades Abelianas I

Ejemplo 1.4 (Variedades Jacobianas)

Sea C una curva suave proyectiva sobre $\mathbb{C}$ de género g. El espacio de las 1-formas holomorfas sobre C

$$H^{(1,0)}(C) \cong \mathbb{C}^g.$$

Sea $H_1(C,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ el primer grupo de homología de C. Sea

$$\begin{aligned} \jmath : H_1(C,\mathbb{Z}) &\to H^{(1,0)}(C)^* \\ \gamma &\mapsto \omega \mapsto \int_\gamma \omega. \end{aligned}$$

La aplicación $\jmath$ es inyectiva, por lo que $H_1(C,\mathbb{Z})$ es un reticulado en $H^{(1,0)}(C)$.

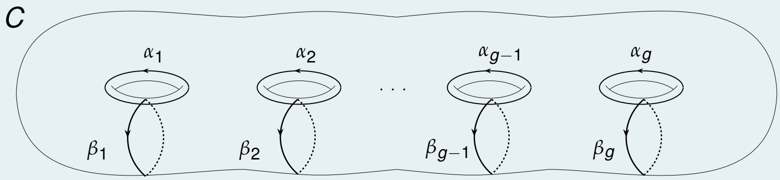
Ejemplos de variedades Abelianas II

Ejemplo 1.4 (Variedades Jacobianas)

El cociente

$$JC := H^{(1,0)}(C)^* / H_1(C, \mathbb{Z})$$

es un toro complejo de dimensión g llamado la variedad Jacobiana de C o simplemente la Jacobiana de C. Más aún, JC es una variedad abeliana, a la que se le puede colocar una polarización principal de manera canónica.



Descomposición de variedades abelianas

Teorema 1.5

Sea G un grupo finito actuando sobre una variedad abeliana A. Existen subvariedades abelianas G-simples $A_1, \dots, A_r$ of A tales que el mapa suma

$$\mu : A_1 \times \cdots \times A_r \to A$$

es una isogenia G-equivariante. Esta descomposición es única modulo isogenias y permutaciones.

Moduli de variedades abelianas

Sea $g \geq 1$ fijo. Entonces el conjunto

$$\mathcal{A}_g = \{\text{variedades abelianas p.p. de dimensión } g\} / \sim$$

se denomina el *espacio de Moduli* de v.a.p.p. Este conjunto es:

- una variedad analítica, pero con singularidades. El lugar singular:

$$Sing(\mathcal{A}_g) = \{A \in \mathcal{A}_g \mid \mathrm{Aut}(A) \neq \{\pm 1\}\}.$$

- una cuasi-variedad proyectiva de dimensión $\dfrac{g(g+1)}{2}$.

Moduli de variedades abelianas

Sea $\mathcal{M}_g$ el espacio de moduli de curvas suaves proyectivas (superficies de Riemann compactas) de género g. La aplicación de Torelli:

$$\begin{aligned} t : \mathcal{M}_g &\rightarrow \mathcal{A}_g \\ C &\mapsto (JC, \Theta) \end{aligned}$$

es inyectiva. La clausura de $t(\mathcal{M}_g)$ ($\mathcal{J}_g$) dentro de $\mathcal{A}_g$ es una subvariedad de dimensión $3g-3$.

- t es dominante para $g = 2, 3$.
- Para $g \geq 4$:

$$\dim(t(\mathcal{M}_g)) < \mathcal{A}_g.$$

Variedades de Prym

Sea $f : \widetilde{C} \to C$ un morfismo finito de curvas suaves proyectivas. Mediante pullback f induce un morfismo

$$f^* : JC \to J\widetilde{C}.$$

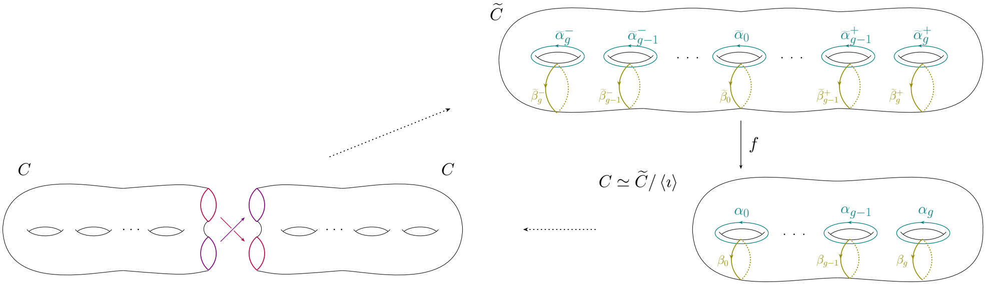
La subvariedad $f^*(JC)$ en $J\widetilde{C}$ tiene un único complemento con respecto a $\widetilde{\Theta}$ denotado por $P(f)$ o $P(\widetilde{C}/C)$ denominada la *variedad de Prym* de f. Se tiene que

$$J\widetilde{C} \sim f^*(JC) \times P(f).$$

Variedades de Prym clásicas

En el caso que $f : \widetilde{C} \to C$ es un cubrimiento étale doble, se sabe que

$$\widetilde{\Theta}_{|P(f)} = (2, \ldots, 2).$$



El Prym-map

Sea

$$\mathcal{R}_{g+1} = \{f : \widetilde{C} \to C \,|\, \text{étale doble con } g(C) = g+1\}/\sim .$$

El Prym-map:

$$\begin{array}{rcl} p : \mathcal{R}_{g+1} & \to & \mathcal{A}_g \\ f & \mapsto & (P(f), \Xi) \end{array}$$

donde $\widetilde{\Theta}_{|P(f)} \equiv 2\,\Xi$.

- p es dominante para $g = 4, 5$.
- Para $g \geq 6$:
$$\dim(\mathcal{P}_g) < \mathcal{A}_g.$$
- $\mathcal{J}_g \subset \overline{\mathcal{P}_g}$

Generalizando

Tyurin [Tju72], encontró una manera de producir v.a.p.p. desde subvariedades de la Jacobiana de una curva.

Definición 2.1

Una v.a.p.p (P, Ξ) es una variedad de Prym-Tyurin de exponente q si existe una curva C y un embebimiento $P \hookrightarrow JC$ tal que

$$\widetilde{\Theta}_{|P(f)} \equiv q\,\Xi.$$

- En [Kan87], Kanev da una serie de ejemplos de variedades de Prym-Tyurin utilizando grupos de Weyl.
- Otros ejemplos fueron dados por Lange-Recillas-Rojas en [LRR05], y Prym-Tyurin de exponente arbitrariamente grande en [CLRR09].

Problema

¿Cómo podemos caracterizar las variedades de Prym-Tyurin de exponente pequeño?. En particular exponente $q = 3$.

Se conocen muy pocos ejemplos de exponente bajo. En [LR12] los autores encuentran algunas variedades de Prym-Tyurin de exponentes pequeños ($q = 3, 4$) que aparecen como factores isotípicos de Jacobianas de curvas.

¿Qué se ha podido hacer hasta ahora?

Variedades de Prym-Tyurin de exponente pequeño.

Cuadro: Ejemplos de variedades de Prym-Tyurin de exponente pequeño.

Group G acting on $\widetilde{C}$	genus of the curve $\widetilde{C}$	exponent	dimension
$S_3 \times S_3(C_3 \times C_3)$	7	3	2
	13	3	4
$C_3 \times C_3^{**}$	7, 10	3	2
$C_3 \times C_3^{**}$	13	3	4
$\mathbb{A}_5$	9	3	4
	13	3	4
$\mathbb{A}_5$	9	3	4
$\mathrm{PSL}(2,8)$	15^*	3	7
$\mathrm{PSL}(2,11)$	26^*	3	10
$\mathrm{PSL}(2,7)$	15^*	3	7
	10	4	3
$\mathbb{A}_4$	8, 11, 14	4	2
	12	4	3
S_4	7, 13, 15, 16, 19	4	1
	$8, 11, 14^*, 17, 20, 26^*$	4	2
	10, 13	4	3
	16, 19	4	4
Q_8^*	10, 20, 25	4	3
	26	4	5

Nuevos ejemplos

Proposición 3.1

Sea $\widetilde{C}$ *una curva suave proyectiva de género* 13 *con acción del grupo* $G = C_3 \times C_3 = \langle s, t \rangle$ *y signatura* $s = (1; 3, 3, 3, 3)$. *Entonces*

$$J\widetilde{C} \sim JC \times P(C_s / C) \times P(C_{st} / C) \times P(C_{s^2t} / C)$$

y más aún, cada una de las Pryms son una variedad de Prym-Tyurin de exponente 3 *y dimensión* 4.

Nuevos ejemplos

$$J\widetilde{C} \sim JC \times P(C_s/C) \times P(C_{st}/C) \times P(C_{s^2t}/C)$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widetilde{C} \arrow[dlll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & & \\
C_s \arrow[drrr] & & C_t \arrow[dr] & & C_{st} \arrow[dl] & & C_{s^2t} \arrow[dlll] \\
 & & & C & & &
\end{tikzcd}$$

Nuevos ejemplos

Proposición 3.2

Sea $\widetilde{C}$ una curva suave proyectiva de género 10 con acción del grupo $G = C_3 \times C_3 = \langle s, t \rangle$ sin puntos fijos. Entonces

$$J\widetilde{C} \sim JC \times P(C_s/C) \times P(C_t/C) \times P(C_{st}/C) \times P(C_{s^2t}/C)$$

y más aún, cada una de las Pryms son una variedad de Prym-Tyurin de exponente 3 y dimensión 2.

Referencias I

- Angel Carocca, Herbert Lange, Rubí E. Rodríguez, and Anita M. Rojas, *Prym-Tyurin varieties via Hecke algebras*, J. Reine Angew. Math. **634** (2009), 209–234. MR 2560410
- V. Kanev, *Principal polarizations of Prym-Tjurin varieties*, Compositio Math. **64** (1987), no. 3, 243–270. MR 918413
- Herbert Lange and Anita M. Rojas, *Polarizations of isotypical components of Jacobians with group action*, Arch. Math. (Basel) **98** (2012), no. 6, 513–526. MR 2935657
- H. Lange, S. Recillas, and A. M. Rojas, *A family of Prym-Tyurin varieties of exponent 3*, J. Algebra **289** (2005), no. 2, 594–613. MR 2142387
- A. N. Tjurin, *Five lectures on three-dimensional varieties*, Uspehi Mat. Nauk **27** (1972), no. 5(167), 3–50. MR 412196