Fibrados de Ulrich sobre superficies de Hirzebruch/$\mathbb{C}$

Tobías Martínez junto con P. Montero y S. Troncoso

Universidad Técnica Federico Santa María

30 de mayo de 2024

Supongamos que $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ es un polinomio homogéneo de grado d. ¿Se puede escribir f como el determinante de una matriz M de formas lineales?

Schröter y Grassmann:

Para el caso $n = 3$ y $d = 3$ a finales de 1800, Schröter y Grassmann prueban lo siguiente:

Schröter y Grassmann:

Para el caso $n = 3$ y $d = 3$ a finales de 1800, Schröter y Grassmann prueban lo siguiente:

Schröter 1863: Toda superficie Cúbica en $\mathbb{P}^3$ es determinantal. Lo usa para encontrar las 27 rectas de las cúbicas.

Schröter y Grassmann:

Para el caso $n = 3$ y $d = 3$ a finales de 1800, Schröter y Grassmann prueban lo siguiente:

Schröter 1863: Toda superficie Cúbica en $\mathbb{P}^3$ es determinantal. Lo usa para encontrar las 27 rectas de las cúbicas.

Grassmann 1885: Todo polinomio homogéneo f de grado 3 en $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ tiene 72 formas diferentes de escribirse como determinante de una matriz de formas lineales.

Malas noticias

Para $n \geq 4$, si $f = det(M)$ entonces la variedad

$$X = \{x = [x_0 : \ldots : x_n] : f(x) = 0\}$$

es singular.

Nueva pregunta

Sea $X = \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^n$, ¿existen $r \geq 1$ y M matriz de formas lineales tal que $f^r = det(M)$?

Proposición (Beauville 2000):

Sea $X = \{f = 0\}$ una hipersuperficie de grado d en $\mathbb{P}^{n+1}$. Sea M matriz de formas lineales de tamaño $(rd) \times (rd)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f^r = \det(M)$
2. Existe un fibrado E sobre X tal que $H^\bullet(X, E(-t)) = 0$ para $1 \leq t \leq n$.

Definición (Eisenbud-Schreyer-Weyman, 2003)

Sea $\varphi : X^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ variedad proyectiva suave polarizada por $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(H) = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$. Un fibrado vectorial $E \to X$ es de Ulrich (respecto a H) si

$$H^\bullet(X, E(-t)) = 0, \quad \forall t \in \{1, \dots, n\}.$$

Pregunta moderna:

Dada una variedad polarizada (X, L), ¿Existe un fibrado vectorial $E \to X$ de Ulrich para el par (X, L)?

Pregunta moderna:

Dada una variedad polarizada (X, L), ¿Existe un fibrado vectorial $E \to X$ de Ulrich para el par (X, L)?

Conjetura (Ulrich):

Toda variedad proyectiva suave tiene un fibrado de Ulrich.

Proposición:

$(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ admite un fibrado de Ulrich de rango $n!$.

Proposición:

$(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ admite un fibrado de Ulrich de rango $n!$.

Proposición:

Toda hipersuperficie $X = \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ admite un fibrado de Ulrich.

Proposición:

$(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ admite un fibrado de Ulrich de rango $n!$.

Proposición:

Toda hipersuperficie $X = \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ admite un fibrado de Ulrich.

Teorema (Herzog-Ulrich-Backelin, 1991):

Toda intersección completa $X \subset \mathbb{P}^n$ admite un fibrado de Ulrich.

Teorema (Beauville, 2015):

Toda superficie abeliana A admite un fibrado de Ulrich de rango 2.

Teorema (Beauville, 2015):

Toda superficie abeliana A admite un fibrado de Ulrich de rango 2.

Teorema (Casnati, 2017):

Ciertas superficies S con $p_g(S) = q(S) = 0$ tienen fibrados de Ulrich de rango 2.

Teorema (Beauville, 2015):

Toda superficie abeliana A admite un fibrado de Ulrich de rango 2.

Teorema (Casnati, 2017):

Ciertas superficies S con $p_g(S) = q(S) = 0$ tienen fibrados de Ulrich de rango 2.

Teorema (Faenzi, 2018):

Toda superficie $K3$ admite un fibrado de Ulrich de rango 2.

Teorema (Montero, Prieto, Troncoso, 2021):

Sea (X, H) una variedad con dimensión positiva. Si $\mathcal{T}_X$ es Ulrich respecto a H, entonces (X, H) es o bien isomorfa $(\mathbb{P}^1, 3L)$, la cúbica torcida en $\mathbb{P}^3$ o $(\mathbb{P}^2, 2L)$, la superficie de Veronese en $\mathbb{P}^5$.

Teorema (Montero, Prieto, Troncoso, 2021):

Sea (X, H) una variedad con dimensión positiva. Si $\mathcal{T}_X$ es Ulrich respecto a H, entonces (X, H) es o bien isomorfa $(\mathbb{P}^1, 3L)$, la cúbica torcida en $\mathbb{P}^3$ o $(\mathbb{P}^2, 2L)$, la superficie de Veronese en $\mathbb{P}^5$.

Aún para el caso de superficies (S, H) no se tiene un panorama completo y para $\dim(X) \geq 3$ realmente se sabe muy poco.

Proposición (M., Montero, Troncoso, 2023):

Toda superficie de Hirzebruch polarizada $(X(\Sigma), H)$ admite un fibrado de Ulrich T- equivariante.

Sea P un polítopo. Dada una faceta $F \prec P$, dicha cara está contenida en el hiperplano

$$H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle = -a_F\}.$$

P está contenido en $H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\}$ y $P = \bigcap_{F \prec P} H_F^+$.

Dado un polítopo de dimensión n, definimos el abanico normal de P como

$$\Sigma_P = \{\sigma_Q := Cono(u_F | F \text{ faceta con } Q \prec F) : Q \prec P\}.$$

Los vértices de P corresponden a $\Sigma_P(n)$ y las facetas corresponden a $\Sigma_P(1)$.

Si $X_P := X(\Sigma_P)$, cada faceta $F \prec P$ corresponde a un divisor primo T-invariante D_F de X_P.

Definamos $D_P = \sum_{F \prec P} a_F D_F$.

También dada una variedad tórica $X = X(\Sigma)$ y un $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho$, definimos el poliedro

$$P_D = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_\rho \rangle \geq -a_\rho, \rho \in \Sigma(1)\}.$$

Proposición:

Existe una biyección entre los conjuntos $\{P \subset M_{\mathbb{R}} : P$ es un polítopo integral de dimensión $n\}$ y $\{(X(\Sigma), D) :$ Σ es un abanico completo en $N_{\mathbb{R}}, D$ un divisor amplio T-invariante en $X(\Sigma)\}$

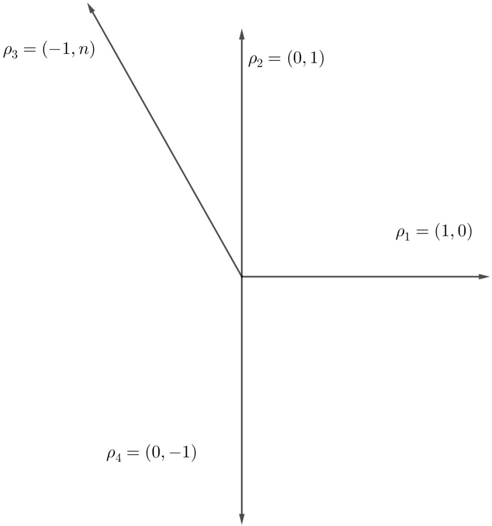
Teorema (Klyachko, 1990):

La categoría de fibrados tóricos sobre una variedad $X(\Sigma)$ es equivalente a la categoría de espacios vectoriales con una familia decreciente de $\mathbb{Z}$-filtraciones $(E, E^{\rho}(i)), \rho \in \Sigma(1), i \in \mathbb{Z}$ tal que:
Para todo $\sigma \in \Sigma$, existe una base $\mathcal{B}_{\sigma}$ de E tal que para todo $\rho \in \sigma(1)$, $E^{\rho}(i)$ está generado por un subconjunto de $\mathcal{B}_{\sigma}$.

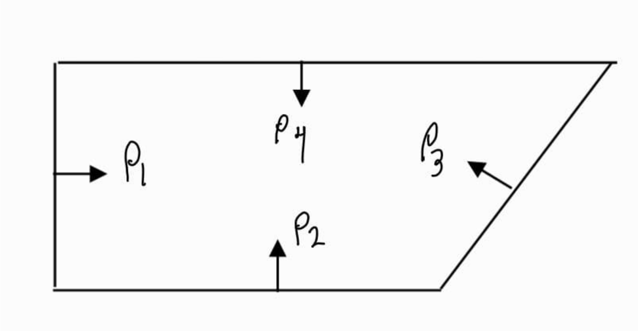
Además en este caso,

1. $H^0(X,\mathcal{E})_\chi = \cap_{\rho\in\mathbf{\Sigma(1)}} E^\rho(\chi)$,
2. $H^n(X,\mathcal{E})_\chi = E/\sum_{\rho\in\mathbf{\Sigma(1)}} E^\rho(\chi)$.

El abanico de la superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_n$ es:

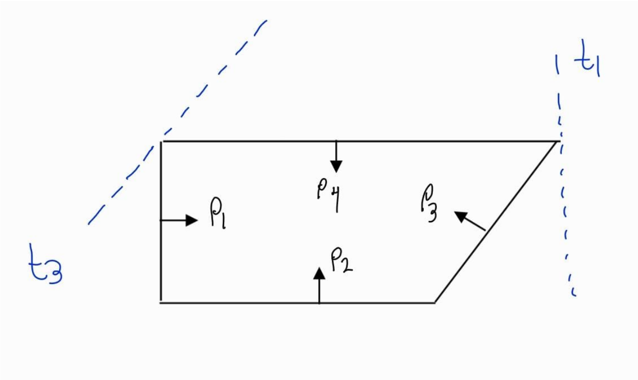


Dado un divisor amplio $D = a_1 D_1 + \ldots + a_4 D_4$, P_D es



Sean $V_2, V_4 \subset \mathbb{C}$ subespacios vectoriales con $\mathbb{C} = V_2 \oplus V_4$, para $j \in 2, 4$ definimos los enteros

$$t_j := \max\{< u, \rho_j > + a_j : u \in P_D \cap \mathbb{Z}^2\},$$



Definimos las filtraciones: Para j par

$$E^{\rho_j}(i) = \begin{cases} \mathbb{C}^2, & i \leq 0, \\ V_j, & 0 < i \leq t_j, \\ \{0\}, & i > t_j. \end{cases}$$

Para j impar

$$E^{\rho_j}(i) = \begin{cases} \mathbb{C}^2, & i \leq 0, \\ \{0\}, & > 0. \end{cases}$$

¡¡Muchas gracias!!

Financiado por ANID-2020/ Doctorado Nacional/ folio 242220237