Construcción de extensiones abelianas de cuerpos cuadráticos

LESLY SUAREZ

Departemento de Matemática y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile

29 mayo 2024

Plan de la Presentación

1. Preámbulo
2. Problema
3. Mi Proyecto

1. PREAMBULO

Revisión histórica

Revisión histórica

Revisión histórica

Definition

Un cuerpo L es **una extensión de un cuerpo** K, si y solo si K es un subcuerpo de L.

Notación : $L|K$.

EXTENSIONES DE CUERPOS

Definition

Un cuerpo L es **una extensión de un cuerpo** K, si y solo si K es un subcuerpo de L.
Notación : $L|K$.

Las extensiones permiten incluir soluciones de ecuaciones que no tienen solución en el cuerpo original.

Definition

Un cuerpo L es **una extensión de un cuerpo** K, si y solo si K es un subcuerpo de L.
Notación : $L|K$.

Las extensiones permiten incluir soluciones de ecuaciones que no tienen solución en el cuerpo original.

Definition

Considerando L como un espacio vectorial sobre K, el **grado de la extensión** es $[L : K] := dim_K L$.

Extensiones de cuerpos

Example

Ej : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es una extensión de $\mathbb{Q}$. Notemos que $\sqrt{2}$ es una solución para $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
Además $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.

[Stewart, I. (2022). Galois theory. Chapman and Hall/CRC.]

Extensiones de cuerpos

Example

Ej : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es una extensión de $\mathbb{Q}$. Notemos que $\sqrt{2}$ es una solución para $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
Además $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.

Definition

$L|K$ es una extensión abeliana si es una extensión de Galois (normal y separable) y $Gal(L|K) = \{\sigma \in Aut(L)/\sigma(k) = k, \forall k \in K\}$ es un grupo abeliano.

[Stewart, I. (2022). Galois theory. Chapman and Hall/CRC.]

2. PROBLEMA

Duodécimo problema de Hilbert- 1900 CIM

Kronecker-Weber (1853-1886-1896) : Si $L|\mathbb{Q}$ es una extensión abeliana finita, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $L \subset \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$

Duodécimo problema de Hilbert- 1900 CIM

Kronecker-Weber (1853-1886-1896) : Si $L|\mathbb{Q}$ es una extensión abeliana finita, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $L \subset \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$

Conjecture (12.ª Problema de Hilbert)

Construir de manera explícita todas las extensiones abelianas de los cuerpos K de números algebraicos ($K|\mathbb{Q}$ finita).

Soluciones parciales y contribuciones

Teoría de cuerpos de clases : Teoría que proporciona una descripción de la existencia y unicidad de extensiones abelianas de cuerpos de números, pero no entrega una construcción explícita. (Kronecker, Weber, Hilbert, Takagi, Artin, Hasse, and Chevalley)
-Teoría de Multiplicación Compleja Respuesta completa al 12 problema de Hilbert, solo cuando K es un cuerpo cuadrático imaginario o su generalización, un cuerpo CM.

Soluciones parciales y contribuciones

Teoría de cuerpos de clases : Teoría que proporciona una descripción de la existencia y unicidad de extensiones abelianas de cuerpos de números, pero no entrega una construcción explícita. (Kronecker, Weber, Hilbert, Takagi, Artin, Hasse, and Chevalley)
-Teoría de Multiplicación Compleja Respuesta completa al 12 problema de Hilbert, solo cuando K es un cuerpo cuadrático imaginario o su generalización, un cuerpo CM.

2021-2023 : Dasgupta & Kakde, usan teoría de integración p-ádica para infinitos primos p. [BRUMER–STARK UNITS AND EXPLICIT CLASS FIELD THEORY].

Soluciones parciales y contribuciones

Teoría de cuerpos de clases : Teoría que proporciona una descripción de la existencia y unicidad de extensiones abelianas de cuerpos de números, pero no entrega una construcción explícita. (Kronecker, Weber, Hilbert, Takagi, Artin, Hasse, and Chevalley)
-Teoría de Multiplicación Compleja Respuesta completa al 12 problema de Hilbert, solo cuando K es un cuerpo cuadrático imaginario o su generalización, un cuerpo CM.

2021-2023 : Dasgupta & Kakde, usan teoría de integración p-ádica para infinitos primos p. [BRUMER–STARK UNITS AND EXPLICIT CLASS FIELD THEORY].

2020-2023 : Darmon & Vonk $\cdots$

3. MI PROYECTO

EXTENSIONES DE CUERPOS CUADRATICOS

Para $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ es un cuerpo de grado 2.

Para $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ es un cuerpo de grado 2.

C.C. Imaginario ($d < 0$)	**C.C. Real ($d > 0$)**
Mult. Compleja para estudiar la aritmética de las EACCI	Teoría de Mult. Real (conjetura) -Darmon y Vonk.
Semi plano superior complejo de Poincaré	Semi plano superior p-ádico de Drinfeld
Función j-invariante	Cociclo meromorfo rígido
Ring Class Field	Narrow Ring Class Field
$\vdots$	$\vdots$

[Cox, D. A. (2022). Primes of the Form x2+ ny2 : Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication. with Solutions (Vol. 387). American Mathematical Soc.]

Mi trabajo ...

Buscamos construir extensiones abelianas para cuerpos cuadráticos reales $\mathbb{Q}(\sqrt{d}), d > 0$

Los objetivos son :

- Manipular la Teoría de Cuerpos de Clase.

Mi trabajo ...

Buscamos construir extensiones abelianas para cuerpos cuadráticos reales $\mathbb{Q}(\sqrt{d}), d > 0$

Los objetivos son :

- Manipular la Teoría de Cuerpos de Clase.
- Estudiar la Teoría de Multiplicación Real.

Mi trabajo ...

Buscamos construir extensiones abelianas para cuerpos cuadráticos reales $\mathbb{Q}(\sqrt{d}), d > 0$

Los objetivos son :

- Manipular la Teoría de Cuerpos de Clase.
- Estudiar la Teoría de Multiplicación Real.
- Estudiar los paquetes (computacionales) propuestos por Vonk para calcular cociclos meromorfos rígidos.

REFERENCIAS

- Darmon, H., Vonk, J. (2021). Singular moduli for real quadratic fields : a rigid analytic approach.

REFERENCIAS

- Darmon, H., Vonk, J. (2021). Singular moduli for real quadratic fields : a rigid analytic approach.
- Fust, P., Ludwig, J., Pozzi, A., Santos, M., Wiersema, H. (2023). Real quadratic singular moduli and p-adic families of modular forms. arXiv preprint arXiv :2309.11974.

REFERENCIAS

- Darmon, H., Vonk, J. (2021). Singular moduli for real quadratic fields : a rigid analytic approach.
- Fust, P., Ludwig, J., Pozzi, A., Santos, M., Wiersema, H. (2023). Real quadratic singular moduli and p-adic families of modular forms. arXiv preprint arXiv :2309.11974.
- Conrad, K. (2001). History of class field theory. This unpublished essay is available online as a PDF file at www. math. uconn. edu/ kconrad/blurbs/gradnumthy/cfthistory. pdf.