Resolución simultánea de deformaciones degeneradas μ-constantes

Gonzalo Rodriguez Ugarte
Universidad de Talca

May 28, 2024

Resolución de Singularidades

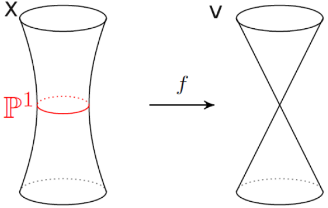


Figure: Resolución de $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Donde X es una variedad suave y f es un morfismo propio y biracional tal que $X - f^{-1}(Sing\ V) \cong V - Sing\ V$

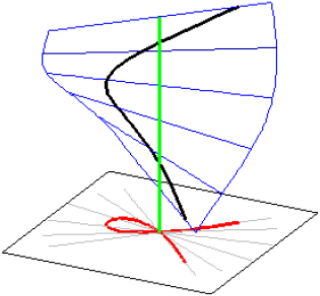
Definición (Resolución Incrustada de Singularidades)

Es un morfismo propio y biracional $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^{n+1}} \to \mathbb{C}^{n+1}$ *entre variedades lisas tal que:*

(i) $\pi : V^s \to V$ *es una resolución de singularidades de* V

(ii) V^t *es un divisor a cruzamientos normales.*

$V^s = \overline{\pi^{-1}(V - Sing\ V)}$ es la Transformación Estricta de V y $V^t = \pi^{-1}(V)$ es la Transformación total de V.



$$\pi : Bl_o\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$
$$\mathbb{P}^1 = \pi^{-1}(o)$$
$$\mathbf{C^s} := \overline{\pi^{-1}(C - o)}$$
$$C^t := \mathbf{C^s} \cup \mathbb{P}^1$$

Resolución del nodo: $y^2 = x^2 + x^3$

Sea V el germen de una Hipersuperficie en $\mathbb{C}_o^{n+1} = (\mathbb{C}^{n+1}, o)$ dada por $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ con un único punto singular en el origen o. Consideremos la notación de multi-índice.

Ejemplo

Si $f = x^5 + y^6 + z^5 + y^3 z^2$. En esta notación f se escribe:

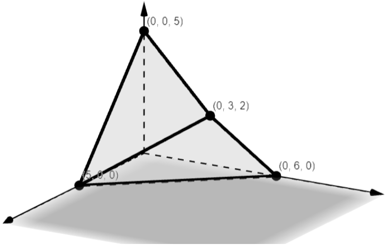
$$f = x^{(5,0,0)} + x^{(0,6,0)} + x^{(0,0,5)} + x^{(0,3,2)}$$

Poliedro de Newton

$$f = x^{(5,0,0)} + x^{(0,6,0)} + x^{(0,0,5)} + x^{(0,3,2)}$$

Se define el poliedro de Newton de f

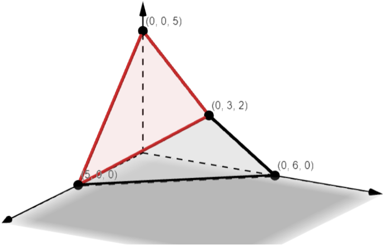
$$\boxed{\Gamma_+(f) = Conv\left(\bigcup_{a_m \neq 0} m + \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0}\right)}$$



$\Gamma_+(f)$

Condición de No-degeneración

El polinomio f es llamado Newton no-degenerado si para cada cara compacta $\gamma \in \Gamma_+(f)$, las derivadas parciales $\partial_1 f_\gamma, \ldots, \partial_{n+1} f_\gamma$ no tienen un cero común en $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$.



$$f_\gamma = x^5 + z^5 + y^3 z^2.$$
$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial x} = 5x^4.$$
$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial y} = 3y^2 z^2.$$
$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial z} = 5z^4 + 2y^3 z.$$

Teorema (Varchenko 76')

Sea $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ una hipersuperficie Newton No-degenerada con Sing $V = \{o\}$. Entonces, existe una subdivisión Σ del abanico estándar Δ, tal que el respectivo morfismo tórico:

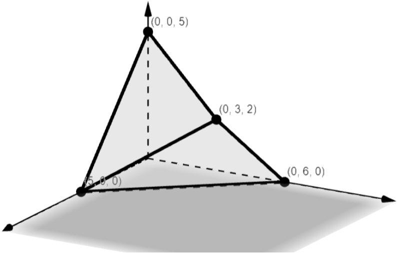
$$\pi : V_\Sigma \to V_\Delta = \mathbb{C}^{n+1}$$

es una resolución incrustada de V.

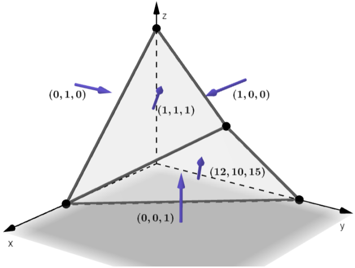
Resolución Tórica

A partir del poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ es posible definir un abanico $\Gamma^*(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0}$ subdivisión del cono estándar Δ.

Por ejemplo, para $f = x^5 + y^6 + z^5 + y^3 z^2$

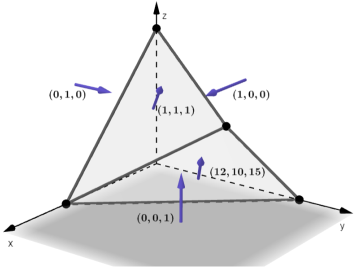


Considere los vectores normales a las caras de $\Gamma_+(f)$

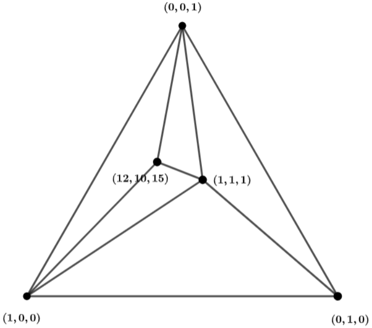


$\Gamma_+(f)$

Considere los vectores normales a las caras de $\Gamma_+(f)$

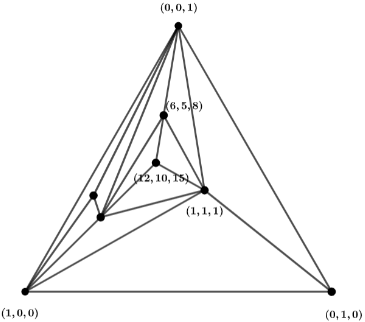


$\Gamma_+(f)$



$\Gamma^*(f)$

Morfismo Tórico



$$\sigma = \langle (12,10,15),(1,1,1),(6,5,8)\rangle$$
$$U_\sigma \cong \mathbb{C}^3 \to \quad \mathbb{C}^3$$
$$(y_1,y_2,y_3) \mapsto (y_1^{12}y_2y_3^6, y_1^{10}y_2y_3^8, y_1^{15}y_2y_3^8)$$

Transformada Total y Estricta

Bajo el morfismo $(y_1, y_2, y_3) \to (y_1^{12}y_2y_3^6, y_1^{10}y_2y_3^8, y_1^{15}y_2y_3^8)$ se tiene que:

$$f = y_1^{50}y_2^5y_3^{30}(y_1^{10} + y_1^{10}y_2 + y_1^{21}y_2^{10} + y_2)$$

Para el caso No-degenerado la transformación estricta es suave y la transformación total es a Cruzamientos Normales.

Deformaciones de Hipersuperficies

Sea W una deformación de la Hipersuperficie V.
En nuestro contexto corresponde a una hipersuperficie de

$$\mathbb{C}_o^{n+1} \times \Omega, \quad \Omega = (\mathbb{C}^m, o)$$

Dada por

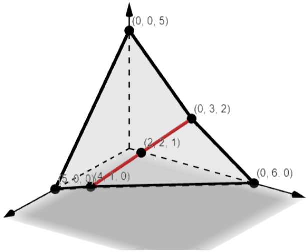
$$F_s(x) = F(x,s) := f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} h_i(s) g_i(x)$$

donde $h_i \in \mathbb{C}\{s_1, \ldots, s_m\}$, $g_i \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ y tal que $h_i(o) = g_i(o) = 0$

Deformación Degenerada

Una deformación Degenerada de f está dada por:

$$\begin{aligned} F_s(x,y,z) &= x^5+y^6+z^5+y^3z^2+2sx^2y^2z+s^2x^4y \\ &= x^5+y^6+z^5+y(y^2z^2+sx^2)^2 \end{aligned}$$



$$F_\gamma = y(y^2z^2+sx^2)^2.$$

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial x} = 4sxy(y^2z^2+sx^2).$$

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial y} = (y^2z^2+sx^2)^2+4y^2z^2(y^2z^2+sx^2).$$

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial z} = 4y^3z(y^2z^2+sx^2).$$

Número de Milnor

Definimos el número de Milnor de $V(f)$.

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}}{(\partial_1 f, \dots, \partial_{n+1} f)}$$

El número de Milnor es un invariante topológico muy importante en la teoría de Singularidades.

Ejemplo

El ejemplo de Altmann es una deformación $\mu -$ *constante pues para todo* $s \in \mathbb{C}_o$ *se tiene,*

$$\mu(F_s) = \mu(f) = 68$$

Teorema (Leyton,Mourtada,Spivakovsky 20')

Si W es una deformación Newton no-degenerada de V. W es $\mu-$constante si y sólo si W admite una resolución simultánea incrustada

Teorema (Leyton,Mourtada,Spivakovsky 20')

Si W *es una deformación Newton no-degenerada de* V. W *es* $\mu-$*constante si y sólo si* W *admite una resolución simultánea incrustada*

Pregunta

Si W *es una deformación Newton* ***Degenerada*** *de* V. *Si* W *es* $\mu-$*constante entonces* W *admite una resolución simultánea incrustada?*

Tipo Topológico

Dos gérmenes de Hipersuperficies $(V_1, p_1) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, p_1)$ y $(V_2, p_2) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, p_2)$ tienen el mismo **tipo topológico** si existe un homeomorfismo $\xi : (\mathbb{C}^{n+1}, p_1) \to (\mathbb{C}^{n+1}, p_2)$ tal que $\xi(V_1) = V_2$.

Definición

Una deformación W de una hipersuperficie V se dice ***Topológicamente Trivial*** *si tiene el mismo tipo topológico que V.*

Teorema (Lê-Ramanujam 76')

Sea W una deformación de una Hipersuperficie $V \subset \mathbb{C}_o^{n+1}$. Para $n \neq 2$ se tiene que W es $\mu-$constante si y sólo si W es topológicamente trivial.

El caso $n = 2$ ellos conjeturan que es cierto, pero este problema sigue abierto.

Pregunta

Sea W una deformación degenerada μ-constante de tipo Altmann de una Hipersuperficie V. Será que W es topológicamente trivial?

Muchas Gracias!