Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION 2017
DOCTORADO
PRIMERA PARTE

1. Sea $\mathcal{R}$ un anillo tal que $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{R}$. Sea $\mathbf{I}$ un ideal propio de $\mathcal{R}$ y $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pruebe que si $a, b \in \mathbf{I}$, entonces $(a, b) \neq 1$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F. Considere el espacio dual de V definido por
$$V^* = \{\varphi : V \to F \ / \ \varphi \text{ es lineal}\}$$
Para $U \leq V$ considere el subespacio anulador definido por
$$\mathbf{An}(U) = \{\varphi \in V^* \ / \ \varphi(u) = 0 \ \forall u \in U.\}$$
Pruebe que
   a) Existe una aplicación lineal inyectiva de $\mathbf{An}(U)$ en el espacio $(V/U)^*$.
   b) Pruebe que
$$\dim(U) + \dim(\mathbf{An}(U)) \leq \dim(V).$$

3. Sea X un espacio topológico, Y un espacio topológico compacto y $x_0 \in X$.
   a) Demuestre que si $V \subset X \times Y$ es un abierto que contiene $\{x_0\} \times Y$, entonces existe un abierto $U \subset X$ que contiene a x_0 y tal que $U \times Y \subset V$
   b) Pruebe que la proposición anterior es falsa si quitamos la hipótesis de Y compacto.
   c) Demuestre que la proyección en la primera coordenada $X \times Y \to X$ es una aplicación cerrada.

4. *a*) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $B \subset \mathbb{R}^n$ cerrado. Demuestre que $A + B \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado.
   b) Construya un ejemplo que muestre que, en el apartado a), la hipótesis A cerrado no basta para concluir.

5. *a*) Determine todos los polinomios irreducibles de grado 5 con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$.
   b) Determine el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})$ sobre $\mathbb{Q}$.