Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION AGOSTO-2017
DOCTORADO
PRIMERA PARTE

1. Considere $\mathbb{F}$ un cuerpo con $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Sean $D_1, D_2 \in \mathbb{F} - \mathbb{F}^2$. Determine $|\mathbb{F}[\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2}] : \mathbb{F}|$.

2. Sea $A \in \mathbb{M}(8, \mathbb{R})$ con polinomio minimal

$$\mathbf{M}_A(x) = (x-2)^2(x-1).$$

   Determine todas las posibles formas de Jordan de A.

3. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. En D considere la topología generada por la siguiente base

   - Todos los abiertos de la topología usual, y
   - Todos los conjuntos de la forma

$$\{p\} \cup B(\epsilon p, 1 - \epsilon)$$

     donde $p \in \mathbb{S}^1 = \partial D$ y $0 < \epsilon < 1$.

   a) Describa la topología que hereda $\mathbb{S}^1$ como subespacio de D.

   b) Demuestre que D no es compacto

   c) Demuestre que D es conexo.

4. Sea $\kappa : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

   Pruebe que la función $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_a^b \kappa(x, y) f(y) \mathrm{d}y$ es continua.

5. Sea R un dominio de integridad y F su cuerpo de fracciones. Para P un ideal primo de R considere

$$R_P = \left\{ \frac{a}{d} \ /a, d \in R, \ d \notin P \right\}.$$

   a) Pruebe que R_P es subanillo de F.

   b) Pruebe que R_P tiene un único ideal maximal.