Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACIÓN 2018
DOCTORADO
SEGUNDA PARTE

1. Sea $\mathbb{Z}_2 = \left\{ x \in \mathbb{Q} : \ \exists\, p \in \mathbb{Z},\ \exists\, q \in \mathbb{Z} \text{ impar},\ x = \frac{p}{q} \right\}$.

   a) Verificar que $\mathbb{Z}_2$ es un subanillo de $\mathbb{Q}$ que contiene a $\mathbb{Z}$.

   b) Determinar los invertibles de $\mathbb{Z}_2$.

   c) Demostrar que $\mathbb{Z}_2$ tiene un único ideal maximal M.

   d) Demostrar que $\mathbb{Z}_2/M$ es el cuerpo de dos elementos.

   e) Demostrar que si $x, y, z \in \mathbb{Q}$ satisfacen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, entonces $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$.

2. Demostrar que una matriz cuadrada $A \in M(n, \mathbb{C})$ que satisface $A^3 = A$ es diagonalizable. ¿Es el mismo enunciado verdad sobre cualquier cuerpo?

3. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Probar o dar un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

   a) Si f^2 es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces f es Riemann integrable.

   b) Si f^3 es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces f es Riemann integrable.

4. *a*) Sea $X = S^1 \times S^1 / \sim$, donde $(p, q) \sim (q, p)$. Calcular $\pi_1(X)$.

   b) ¿Qué pasa si reemplazamos S^1 por S^2?

5. Sea (X, d) un espacio métrico y Γ un subgrupo de $\mathrm{Isom}(X, d)$ (el grupo de isometrías de (X, d)). Para $x \in X$, defina la función

$$\rho_x : \Gamma \times \Gamma \to [0, +\infty) : (g, h) \mapsto d(g(x), h(x)).$$

   a) Si $x \in X$ tiene Γ-estabilizador trivial, es decir, $\mathrm{Stab}_\Gamma(x) = \{I\}$, verificar que ρ_x define una métrica en Γ. ¿Qué pasa con ρ_x cuando $\mathrm{Stab}_\Gamma(x) \neq \{I\}$?

   b) Sean $x_1, x_2 \in X$ con $\mathrm{Stab}_\Gamma(x_j) = \{I\}$, para $j = 1, 2$. ¿Es posible encontrar una sucesión $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ en Γ de manera que ella sea acotada respecto a ρ_{x_1} y no lo sea respecto a ρ_{x_2}? (Indicación: analizar $|\rho_{x_1} - \rho_{x_2}|$).