Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION 2015
DOCTORADO
SEGUNDA PARTE

1. Sea V un espacio vectorial complejo con $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$ y $T : V \to V$ una función lineal. En cada uno de los siguientes casos, demuestre que V tiene una base formada por vectores propios de T.

   a) T conmuta con una función lineal $S : V \to V$ que tiene n valores propios distintos.

   b) $T^k = I$ para algún entero positivo k.

2. Considere los espacios de funciones

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua y acotada}\},$$

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua y tal que } \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty \right\},$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua y tal que } \|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\, dx \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

   Demuestre que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

3. Sea R un anillo conmutativo tal que existen $x, y \in R$ con $xy \neq 0$. Demuestre que si $\{0\}$ y R son los únicos ideales de R entonces R es un cuerpo.

4. Determine todos los grupos no isomorfos de orden 2015. Para cada uno construya un ejemplo.

5. Sean $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $A : X \to X$ dada por $A(x,y) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right)$ y $G = \langle A \rangle$ el grupo generado por A. Considere la siguiente relación de equivalencia en X :

$$(x', y') \sim (x, y) \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } A^n(x,y) = (x', y').$$

   Sea $Y = X/\sim$ con la topología cociente.

   a) Verifique que G actúa propiamente discontinua y sin puntos fijos en X.

   b) ¿ Es Y Hausdorff?.