Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACIÓN 2018
DOCTORADO
PRIMERA PARTE

1. Sea k un cuerpo y $K = k(X)$ el cuerpo de funciones racionales sobre k. Considere $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(K/k)$ definidos por $\sigma(X) = \frac{1}{X}$ y $\tau(X) = 1 - X$, donde $\mathrm{Aut}(K/k)$ es el grupo de automorfismos de K que actúan como la identidad sobre k.

   a) Describir la estructura del grupo $G = \langle \sigma, \tau \rangle$.

   b) Determinar $\mathrm{Fix}(G)$.

2. Sea G un grupo generado por dos elementos, y $G^2 = \langle g^2 : \ g \in G \rangle$.

   a) Verificar que $G^2 \lhd G$.

   b) Determinar las posibilidades para G/G^2.

3. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y sean S y T transformaciones lineales diagonalizables de V en V. Decimos que S y T son simultáneamente diagonalizables si existe una base de V tal que las matrices asociadas a S y a T en dicha base son matrices diagonales. Demuestre que S y T son simultáneamente diagonalizables si, y sólo si, $ST = TS$.

4. Sean X e Y dos espacios métricos compactos y $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existen dos conjuntos finitos $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y de Y en $\mathbb{R}$, respectivamente, tales que, para cada $(x, y) \in X \times Y$
$$\left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(y) \right| < \varepsilon.$$

5. Sea X un espacio topológico Hausdorff finito. ¿Es X un espacio metrizable?