Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION 2015
DOCTORADO
PRIMERA PARTE

1. Sea X el conjunto de las funciones continuas del intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.
   Para f y g en X, sea
   $$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$
   Pruebe que (X,d) es un espacio métrico y decida si es completo.

2. Pruebe que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.

3. a) Sean V y W subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen
   $$V\leq W \qquad \text{y} \qquad \dim W = 1+\dim V.$$
   Pruebe que $\dim_{\mathbb{R}}(W\cap V^{\perp})=1$, donde
   $$V^{\perp}=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,v\rangle = 0 \text{ para todo } v\in V\}$$
   y $\langle x,v\rangle$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.
   b) Sean
   $$V_1\subset V_2\subset \ldots \subset V_n=\mathbb{R}^n$$
   subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ con $\dim_{\mathbb{R}}(V_j)=j$, para todo $1\leq j\leq n$.
   Pruebe que existe $A\in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AA^t=I_n$ y tal que el espacio vectorial generado por sus primeras j columnas es exactamente V_j para todo j.

4. Considere el grupo G con presentación

$$G = \langle a_1, a_2 : \ a_1^2 a_2^{-1} a_1^3 a_2^2 = 1 \rangle.$$

   Construya un espacio topológico arco-conexo Y con $\pi_1(Y) \cong G$.

5. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuamente diferenciables en $[a, b]$. Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f en $[a, b]$ y que $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función g en $[a, b]$.

   Pruebe que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en $[a, b]$ y que f es diferenciable con $f' = g$.